SỞ GD & ĐT HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI

ĐỀ THI THÁNG LẦN 4 LỚP 10 TOÁN

NĂM HỌC 2020 - 2021

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 Phút

Câu 1 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Câu 2 (2,0 điểm). Gọi u là nghiệm dương của phương trình $x^2 + x - 4 = 0$. Xét đa thức

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ với n nguyên dương và a_i tự nhiên thỏa mãn $P(u) = 2021$.

Chứng minh rằng $a_0 + a_1 + ... + a_n$ lẻ

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh AB, một đường tròn (O) qua C,D, không tiếp xúc AC và BC. Điểm M, N là giao của BC và AC với (O).

1) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn (S) tiếp xúc với DM tại M và DN tại N

2) Giả sử (S) cắt BC tại P khác M, AC tại Q khác N. Chứng minh độ dài MP và NQ không phụ thuộc vào vị trí của đường tròn (O)

Câu 4 (1,5 điểm). Chứng minh với mọi số nguyên dương m lớn bất kỳ, tồn tại số n nguyên dương sao cho trong biểu diễn thập phân của 5^n chứa ít nhất m số 0 liên tiếp

Câu 5 (1,5 điểm). Với mỗi số tự nhiên $n \geq 4$, ký hiệu t_n là số nhỏ nhất các tập hợp con 3 phần tử của tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sao cho tập hợp con gồm 4 phần tử tùy ý của S_n luôn chứa ít nhất một trong các tập hợp con 3 phần tử này.

1) Chứng minh $t_6 = 6$

2) Chứng minh rằng $t_n \geq \dfrac{1}{4} C_n^3$.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THÁNG LẦN 2 LỚP 10 TOÁN 2020-2021

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

Lời giải:

* Điều kiện: $x+y>0$

(1) $\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(x+y)+8xy=16(x+y)$

$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-2xy\right](x+y)-16(x+y)+8xy=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-16(x+y)-2xy(x+y)+8xy=0$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2-16\right]-2xy(x+y-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)[(x+y)(x+y+4)-2xy]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-4=0 \\ x^2+y^2+4(x+y)=0 \end{array}\right.$

Từ $(3)\Rightarrow x+y=4,$ thế vào (2) ta được $x^2+x-4=2\Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\Rightarrow y=7 \\ x=2\Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

(4) vô nghiệm vì $x^2+y^2\geq 0$ và $x+y>0$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(-3;7);(2;2)$

Câu 2. Gọi u là nghiệm dương của phương trình $x^2+x-4=0$. Xét đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ với n nguyên dương và a_i tự nhiên thỏa mãn $P(u)=2021$.

Chứng minh rằng $a_0+a_1+...+a_n$ lẻ

Lời giải:

Giả sử $P(x)=Q(x)(x^2+x-4)+ax+b$ với $Q(x)\in\mathbb{Z}[X]$ và $a,b\in\mathbb{Q}$

Ta được $au+b=2021$ nên $a=0$ và $b=2021$ (do $u\notin\mathbb{Q}$)

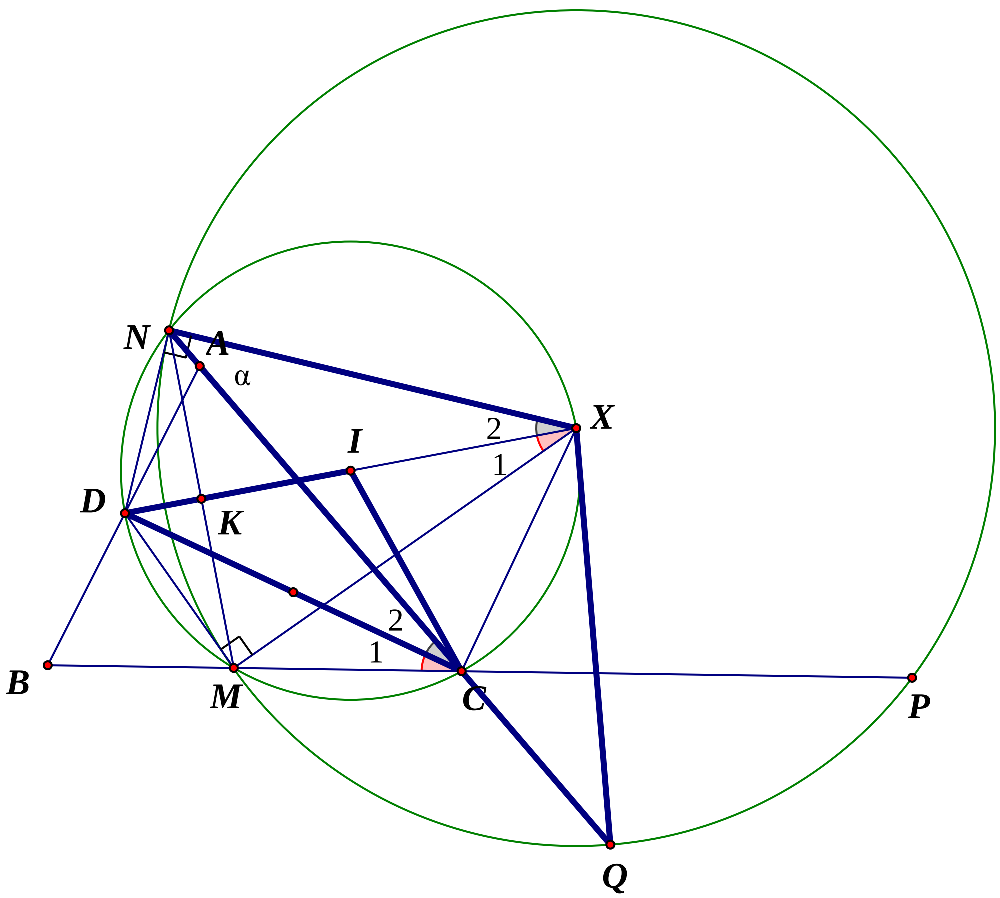
Vì $P(x)=Q(x)(x^2+x-4)+2021$ nên $P(1)=2021-2Q(1)$ lẻ.

Câu 3. Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh AB, một đường tròn (O) qua C,D, không tiếp xúc AC và BC. Điểm M, N là giao của BC và AC với (O).

a) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn (S) tiếp xúc với DM tại M và DN tại N

b) Giả sử (S) cắt BC tại P khác M, AC tại Q khác N. Chứng minh độ dài MP và NQ không phụ thuộc vào vị trí của đường tròn (O)

Lời giải:



a) Giả sử đường thẳng qua M vuông góc DM cắt đường thẳng qua N vuông góc với DN tại X. Khi đó tứ giác XNDM nội tiếp nên 5 điểm X,N,D,M,C thuộc một đường tròn. Ta có $\angle X_1 = \angle C_1 = \angle C_2 = \angle X_2$. Từ đó hai tam giác XND và XMD bằng nhau, suy ra XM=XN.

Đường tròn tâm X, bán kính XM tiếp xúc DN tại N và DM tại M. Điều phải chứng minh

b) Chủ yếu là tính toán

Cách 1. $\triangle XCM = \triangle XCQ$ vì $\angle XQC = \angle XNC = \angle XDC = \angle XMC$ và $\angle XCQ = \angle XCP + \angle PCQ = \angle XCN + \angle NCM = \angle XCM$. Ta được $CM = CQ$. Tương tự $CN = CP$. Từ đó $MP = MC + CP = QC + CN = NQ$ nên ta chỉ cần chứng minh $MC + CN$ không đổi.

Thật vậy: Áp dụng định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp MCND có

$MC.ND + MD.NC = CD.MN$. Mà DM=DN nên $MC + NC = \dfrac{CD.MN}{DM}$

Mặt khác $\dfrac{MN}{MD} = 2\dfrac{MK}{MD} = 2\cos\dfrac{C}{2}$ cố định nên ta có điều phải chứng minh.

- **Chú ý:** Cách làm này phụ thuộc chút vào hình vẽ. Có thể với thế hình khác, sẽ chứng minh |MC-CN| không đổi, nhưng vẫn sử dụng được định lý Ptoleme cho tứ giác nội tiếp tạo bởi 4 điểm M,C,N,D

Cách 2.

Có $\frac{XN}{XD} = \sin\angle NDX = \sin(\frac{1}{2}\angle NDM) = \sin\frac{1}{2}\angle NCM$ là hằng số. Mà $\frac{XD}{CD} = \frac{1}{\cos CDX} = \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$. Từ đó XN cố định. Mà $\angle NXQ = 2\angle C$ nên QN cố định. Điều phải chứng minh.

Cách 3.

$\triangle XNQ \sim \triangle IDC$ nên $\frac{NQ}{CD} = \frac{XN}{XD}$ là hằng số. Điều phải chứng minh

Câu 4. Chứng minh với mọi số nguyên dương m lớn bất kỳ, tồn tại số n nguyên dương sao cho trong biểu diễn thập phân của 5^n chứa ít nhất m số 0 liên tiếp

Lời giải:

Ta thấy rằng với $s > l$ bất kì, thì luôn có $5^{l+2^s} - 5^l = 5^l\left(5^{2^s} - 1\right)$

Mặt khác $v_2\left(5^{2^s} - 1\right) \geq v_2\left(2^s\right) = s$

do vậy ta suy ra $5^{l+2^s} \equiv 5^l\left(\bmod 10^l\right)$, với moi $s > l$.

Giả sử $5^l = \overline{x_1x_2\ldots x_k}$ (có k chữ số)

Chọn $l > m + k$ và $s > l$ thì $5^{l+2^s} - 5^l$ có dạng $\overline{A00\ldots0}$ với số số 0 nhiều hơn m+k.

Do đó $5^{l+2^s} = \overline{A00\ldots0x_1x_2\ldots x_k}$ có nhiều hơn m chữ số 0 liên tiếp.

Câu 5. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 4$, ký hiệu t_n là số nhỏ nhất các tập hợp con 3 phần tử của tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sao cho tập hợp con gồm 4 phần tử tùy ý của S_n luôn chứa ít nhất một trong các tập hợp con 3 phần tử này.

1) Chứng minh $t_6 = 6$

2) Chứng minh rằng $t_n \geq \frac{1}{4}C_n^3$.

Lời giải:

1) Ta thấy họ 6 tập con gồm 3 phần tử $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{1,5,6\},\{2,5,6\}$

có tính chất là mọi tập con 4 phần tử của S_6 đều chứa ít nhất một trong chúng nên $t_6 \leq 6$. Mặt khác, xét một họ 5 tập hợp con 3 phần tử A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tùy ý.

Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại ít nhất một phần tử p của S_6 có mặt trong ít nhất $\left[\frac{3\cdot 5}{6}\right]+1=3$ tập hợp con này. Như vậy, nếu xét tập hợp 5 phần tử $S_6\setminus\{p\}$ thì trong $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,$ chỉ có nhiều nhất $5-3=2$ tập con 3 phần tử không chứa p, ký hiệu là A, B. Dễ thấy $A\cap B\neq\varnothing$ (nếu không thì $A\cup B$ có 6 phần tử, vô lý) và với q là phần tử chung của $A\cap B$ thì $S_6\setminus\{p,q\}$ là tập con gồm 4 phần tử không chứa bất bất kỳ A_i làm

tập hợp con, suy ra $t_6\geq 6$.

Do đó ta có $t_6=6$.

2) Do $t_4=1$ và t_n không thay đổi khi thay S_n bởi tập hợp gồm n phần tử tùy ý nên ta sẽ

chứng minh $t_n\geq\frac{1}{4}C_n^3$ bằng quy nạp.

Với $n=4$ thì $t_4\geq\frac{1}{4}C_4^3$

Giả sử $t_n\geq\frac{1}{4}C_n^3$ đúng với $n\geq 4,$ ta sẽ chứng minh $t_{n+1}\geq\frac{1}{4}C_{n+1}^3$

Xét họ t_{n+1} các tập hợp các tập hợp 3 phần tử thỏa mãn điều kiện đầu bài là một tập hợp 4 phần tử tùy ý luôn chứa một trong chúng. Bỏ đi một phần tử p tùy ý trong S_{n+1}, ta còn tại một số tập hợp con 3 phần tử thỏa mãn điều kiện là một tập hợp con 4 phần tử của $S_{n+1}\setminus\{p\}$ luôn chứa ít nhất 1 trong các tập con này và do đó số tập hợp con 3 phần tử còn

lại không ít hơn t_n

Vì luôn tồn tại một phần tử p thuộc ít nhất $\frac{3t_{n+1}}{n+1}$ tập hợp, suy ra $t_{n+1}-\frac{3t_{n+1}}{n+1}\geq t_n$.

Áp dụng giả thiết quy nạp là $t_n\geq\frac{1}{4}C_n^3,$ ta có ngay $t_{n+1}-\frac{3t_{n+1}}{n+1}\geq\frac{1}{4}C_n^3$ hay $t_{n+1}\geq\frac{1}{4}C_{n+1}^3$